2. Onat E., Drucker D. Ine lastic instability and incremental theories of plasticity. Journ. of Aerospace Sci., v. 20, 1953, pp. 181—186 (Перевод: Сб. переводов. «Механика», 1955, № 3, с. 81—89).

3. **Зубчанинов В. Г.** О понятии пластической устойчивости и неустойчивости и некоторые проблемы неупругой устойчивости конструкций.—В сб.: Механика сплошных сред. Тула, 1973, с. 61—72. (Тульский политехнический ин-т).

4. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.

5. **Петров В. В.** Исследование конечных прогибов пластин и пологих оболочек методом последовательных нагружений. — В кн.: Теория пластин и оболочек. Киев, изд-во АН СССР, 1962, с. 328—331.

6. **Петров В. В.** К вопросу расчета пластинок и пологих оболочек с учетом физической и геометрической нелинейности. — В сб.: Механика деформируемых сред. Изд-во Саратовского госуниверситета, 1974, вып. 1, с. 123—130.

7. **Сорокин В. В.** Упругопластический изгиб и устойчивость круговой цилиндрической оболочки с начальными неправильностями формы. — «Изв. АН СССР. Механика». 1965, № 3, с. 114—118.

8. **Сорокин В. В.** Приближенный метод исследования больших прогибов и несущей способности упругопластических оболочек. — МТТ, 1966, № 4, с. 81—87.

9. **Рикардс Р. Б., Браунс Я. А.** Исследование форм выпучивания полимерных цилиндрических оболочек при длительном нагружении. — Механика полимеров», 1971, № 2.

10. **Биргер И. А.** Некоторые общие методы решения задач теории пластичности.—ПММ, 1951, т. 15, в. 6, с. 765—770.

11. **Григолюк Э. И.** О выпучивании оболочек за пределом упругости. — «Изв. АН СССР. ОТН», 1957, № 10, с. 3—9.

12. **Евсеева М. П.** Влияние остаточных напряжений на устойчивость замкнутой круговой цилиндрической оболочки под действием всестороннего внешнего давления. — В сб.: Расчет пространственных конструкций, М., Стройиздат, 1967, с. 153—170.

УДК 539—3

О. Д. Горбенко, Т. Д. Семыкина

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Предлагается численный метод расчета осесимметричного деформирования вязкопластической оболочки вращения с произвольным видом меридиана на основе вариационного принципа Ильюшина-Прагера [1, 2].

Рассмотрим оболочку, выполненную из материала, свойства которого описываются зависимостью [1]:

$$\sqrt{I'_2} = \pm k + 2\eta \sqrt{\dot{I}'_2},$$

где $I'_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$, $\dot{I}'_2 = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$;

k — предел текучести при сдвиге;

η — коэффициент вязкости.

Для таких материалов справедлив вариационный принцип Ильюшина-Прагера, согласно которому из всех кинематически допустимых полей скоростей деформаций истинное поле скоростей дает минимум следующему функционалу:

$$I = \int_V (2\eta \dot{I}'_2 + k\sqrt{\dot{I}'_2})\, dV - \int_S t_i \dot{v}_i\, dS - \int_V X_i \dot{v}_i\, dV, \qquad (1)$$

где t_i, X_i—поверхностные и массовые силы, v_i — перемещения.

Предположим, что выполняются гипотезы Кирхгофа-Лява

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}^0_1 + \dot{\varkappa}_1 z; \quad \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}^0_2 + \dot{\varkappa}_2 z.$$

Введем следующим обозначения:

$$a = \dot{\varkappa}^2_1 + \dot{\varkappa}_1\dot{\varkappa}_2 + \dot{\varkappa}^2_2; \quad b = \dot{\varepsilon}^0_1 (\dot{\varkappa}_2 + 2\dot{\varkappa}_1) + \dot{\varepsilon}^0_2 (\dot{\varkappa}_1 + 2\dot{\varkappa}_2);$$

$$c = \dot{\varepsilon}^{0^2}_1 + \dot{\varepsilon}^0_1 \dot{\varepsilon}^0_2 + \dot{\varepsilon}^{0^2}_2,$$

тогда

$$\dot{I}'_2 = \dot{I}_2 = az^2 + bz + c.$$

Переходя в (1) к повторным интегралам по сферическим координатам φ, Θ, z, получим (рис. 1):

$$I = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} FR_1R_2 \sin\varphi\, d\varphi - \int_V X_i v_i\, dV -$$

$$-2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} t_i v_i R_1 R_2 \sin\varphi\, d\varphi,$$

где

$$F = \frac{k(ah+b)}{4a}\sqrt{\dot{I}_2(h/2)} + \frac{k(ah-b)}{4a}\sqrt{\dot{I}_2(-h/2)} +$$

$$\times \frac{(4ac-b^2)k}{8a\sqrt{a}} \ln\left|\frac{ah+b+2\sqrt{a}\sqrt{\dot{I}_2(h/2)}}{-ah+b+2\sqrt{a}\sqrt{\dot{I}_2(-h/2)}}\right| +$$

$$+\eta\frac{ah^3}{6} + 2\eta ch,$$

а R_1, R_2—главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

Условием кинематической допустимости обобщенных скоростей деформаций являются граничные условия, наложенные на скорости перемещений, и соотношения

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{A}\,\frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} + \frac{\dot{w}}{R_1}; \qquad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{u}}{AB}\,\frac{\partial B}{\partial \varphi} + \frac{\dot{w}}{R_2};$$

$$\dot{\varkappa}_1 = \frac{1}{A}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\dot{u}}{R_1} - \frac{1}{A}\,\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi}\right);$$

$$\dot{\varkappa}_2 = \frac{1}{AB}\left(\frac{\dot{u}}{R_1} - \frac{1}{A}\,\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial B}{\partial \varphi}, \tag{2}$$

где A, B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки, u, w — меридиональное и нормальное перемещения.

Для численного решения задачи меридиан разбивается на равные отрезки, характеризуемые изменением угла $\Delta\varphi$, а интеграл заменяется суммой по одной из квадратурных формул, например, по формуле Симпсона. Заменяя производные в каждом узле конечно-разностными выражениями, получим в итоге, что I является функцией скоростей перемещений в узлах сетки $\dot{u}_i$, $\dot{w}_i$. Истинными перемещениями являются те, которые минимизируют функционал $I(\dot{u}_i, \dot{w}_i)$. Таким образом, задача свелась к минимизации функции многих переменных при ограничениях, вытекающих из граничных условий и соотношений (2).

В качестве примера рассмотрим деформирование круглой свободно опертой пластины, находящейся под действием равномерно распределенного давления интенсивностью p. В этом случае варьируемый функционал принимает вид

$$I = 2\pi \int_0^R \left(\eta\,\frac{ah^3}{6} + \frac{1}{2}\,kh^2\sqrt{a} - p\dot{w}\right) r\,dr, \tag{3}$$

где R — радиус пластины, r — текущий радиус.

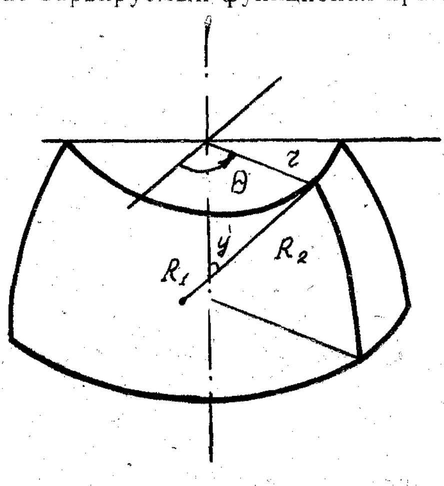

Рис. 1

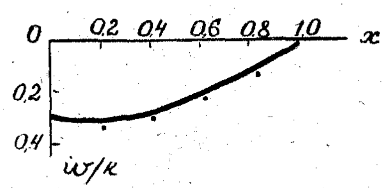

Рис. 2

Дополнительными условиями будут

$$\dot{\varkappa}_1 = -\frac{d^2\dot{w}}{dr^2}, \quad \dot{\varkappa}_2 = -\frac{1}{r}\frac{d\dot{w}}{dr};$$

$$\dot{w}(R) = 0; \quad \dot{\varkappa}_2(R) = -2\dot{\varkappa}_1(R). \tag{4}$$

Требуется найти распределение прогибов $\dot{w}$, приносящее минимум функционалу (3) при ограничениях (4). В безразмерном виде задача запишется следующим образом: найти

$$\min_{\dot{w}} 2\pi R^2 k \int_0^1 \left[\eta \frac{H}{6k}\left(k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{H}{4}\sqrt{k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2} - qv\right] x\, dx$$

при дополнительных условиях

$$k_1 = -H\frac{d^2 v}{dx^2}; \quad k_2 = -\frac{H}{x}\frac{dv}{dx};$$

$$v(1) = 0; \quad k_2(1) = -2k_1(1),$$

где

$$k_1 = \dot{\varkappa}_1 h; \quad k_2 = \dot{\varkappa}_2 h; \quad H = h/R;$$

$$x = r/R; \quad v = \dot{w}/R; \quad q = p/k.$$

После приведения к дискретному виду задача решалась на ЭЦВМ БЭСМ-4 с использованием стандартной процедуры минимизации функции многих переменных. Расчет производился при значении безразмерной нагрузки, равном 10. Сравнение результатов счета с прогибами, полученными в [3], указывает на эффективность рассмотренного численного метода.

На рис. 2 сплошной линией изображены прогибы, полученные в [3], точками—прогибы, полученные предложенным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фрейденталь А., Гейрингер Х.** Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.

2. **Ильюшин А. А.** Деформация вязкопластического тела. — «Учен. зап. МГУ, сер. Механика», 1940, вып. 39.

3. **Пэжина П.** Основные вопросы вязкопластичности. М., «Мир», 1968.

4. **Зангвилл У.** Нелинейное программирование. М., «Советское радио», 1973.